

# un alcance sobre la hipótesis de no-deslizamiento en flujo viscoso\*

M. Letelier S.\*\* y A. González A.\*\*

---

*RESUMEN: Se analiza establecimiento en el tiempo de flujo de Poiseuille con deslizamiento del fluido en la pared. Se pone en evidencia que en estas circunstancias el flujo presentaría características inaceptables desde el punto de vista físico y matemático. De este modo, se concluye que el presente estudio constituye un principio de demostración analítica parcial de la necesidad de la hipótesis de no-deslizamiento en la pared del ducto.*

*SUMMARY: Establishment in time of Poiseuille flow is analysed under conditions of wall slip. It is thus shown that under these circumstances the flow would present physically and mathematically unacceptable characteristics.*

*It is concluded, in this manner, that this study constitutes an elementary and partial analytic demonstration of the necessity of the no-slip hypothesis.*

---

\* Manuscrito revisado y aprobado en forma definitiva en octubre de 1983.

\*\* Departamento de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad de Santiago de Chile (USACH).

## 1. INTRODUCCION

Es un fenómeno bien conocido que la presencia de un contorno sólido en el escurrimiento de un fluido afecta el comportamiento cinemático y dinámico de éste.

Matemáticamente, lo anterior se refleja en las condiciones de borde que se asocian a las ecuaciones de movimiento.

Para un fluido Newtoniano, la condición de contorno universalmente asociada a una pared sólida impermeable, es la condición que la velocidad del fluido en contacto con la pared debe ser igual a la velocidad de ésta. Dicha condición se denomina habitualmente hipótesis de no-deslizamiento.

La hipótesis de no-deslizamiento ha resultado muy fructífera a lo largo de la historia de la investigación en mecánica de fluidos, encontrándose que conduce generalmente a resultados positivos, con excepción de algunos casos en que aquélla no se cumple. Entre estos casos se incluyen los gases rarificados, películas lubricantes sometidas a altas deformaciones y esfuerzos, flujo alrededor de aristas vivas y movimiento de líneas de contacto<sup>1</sup> (formadas por el contacto de la interfase entre dos fluidos que no se mezclan y una pared sólida).

El aporte de la física de superficies no es aún suficiente en este aspecto, no entregando una guía fundamental para el entendimiento de la conducta de los fluidos en los bordes sólidos. Por esta razón la condición de no-deslizamiento conserva aún su carácter de hipótesis.

En muchas situaciones la hipótesis de no-deslizamiento, en el actual conocimiento que del fenómeno se tiene, si bien es conveniente y positiva, conceptualmente, dentro de ciertos límites, no es matemática ni físicamente necesaria. Un ejemplo de lo anterior es el flujo de Poiseuille, para el cual la ecuación de momentum admite una solución para la velocidad axial con valor distinto de cero en la pared del tubo.

Sin embargo, hay ciertos tipos de flujo viscoso donde la condición de no-deslizamiento tiene carácter de necesaria. Es decir, si se aceptara algún grado de deslizamiento en la pared, las ecuaciones de movimiento predecirían características de flujo cualitativa y cuantitativamente en fuerte contradicción con la observación experimental. Uno de estos casos se presenta en flujo acelerado desde el reposo hasta cierta velocidad límite constante, en el interior de una tubería recta circular.

La discusión del problema indicado, objetivo de esta nota, se espera contribuya de alguna manera en el entendimiento de la hipótesis de no-deslizamiento.

## 2. LA CONDICION DE NO-DESLIZAMIENTO EN FLUJO DE POISEUILLE

El escurrimiento estacionario de un fluido Newtoniano incomprensible, en régimen laminar paralelo, en un tubo circular, es gobernado por las ecuaciones de continuidad y momentum, a saber,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2)$$

en las cuales  $u$  es la velocidad axial,  $x$  y  $r$  son las coordenadas axial y radial, respectivamente,  $\rho$  es la densidad,  $\nu$  es la viscosidad cinemática y  $P = p + \rho gh$  es la presión piezométrica, donde  $p$  es la presión,  $g$  es la aceleración de gravedad y  $h$  es la altura. La condición de no-deslizamiento es  $u(a) = 0$ , con  $a =$  radio del tubo.

La bien conocida solución de (2) es

$$u = - \frac{1}{4 \mu} \frac{\partial P}{\partial x} (a^2 - r^2) \quad (3)$$

En (3) se tiene  $\partial P/\partial x = \text{constante}$  y  $\mu = \rho\nu$ .

Si el problema se reconsidera ahora, suponiendo que el fluido se desliza en la pared y adquiere allí una velocidad  $u_0$  constante, la solución de (2) es

$$u = u_0 - \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (a^2 - r^2) \quad (4)$$

En este caso el campo de velocidades sufre una traslación, conservándose la distribución del esfuerzo de corte y la forma parabólica del perfil de velocidades. Si  $u_0$  es lo suficientemente pequeña, pero distinta de cero, el flujo así considerado es cualitativa y cuantitativamente similar al flujo que se da en la realidad. Esto hace permisible plantear que en este caso la hipótesis de no-deslizamiento no es, intrínseca y conceptualmente, necesaria para la descripción del flujo.

### 3. LA CONDICION DE NO-DESLIZAMIENTO EN EL ESTABLECIMIENTO DEL FLUJO DE POISEUILLE

Por establecimiento de flujo se entiende el proceso de aceleración de un fluido desde el reposo hasta una velocidad de régimen permanente en una tubería, bajo la acción de un gradiente de presiones  $\partial P/\partial x$  constante. Este fenómeno se produce, por ejemplo, cuando se abre brusca y totalmente el extremo libre de una tubería, alimentada por su otro extremo por un estanque con altura de carga constante.

El estudio analítico de este problema, bajo las restricciones definidas en el párrafo anterior, fue presentado por primera vez por F.J. Szymanski<sup>2</sup>.

La ecuación de continuidad es (1), en tanto la ecuación de cantidad de movimiento toma ahora la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \text{constante} \quad (5)$$

$t = \text{tiempo}$ .

La solución de (5), considerando deslizamiento, puede ser dada en general por

$$u = u_1(r, t) + u_0 - \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (a^2 - r^2) \quad (6)$$

donde  $u_1$  debe cumplir las condiciones

$$u_1(r, \infty) = 0 \quad (7)$$

$$u_1(r, 0) = -u_0 + \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (a^2 - r^2) \quad (8)$$

La condición (7) asegura que el flujo se establece para  $t \rightarrow \infty$  y la ecuación (8) representa la condición inicial del problema, es decir,  $u(r, 0) = 0$ . La forma de  $u_1$  debe resultar al sustituir (6) en (5). Esta operación conduce a

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) = 0 \quad (9)$$

la cual indica que  $u_1$  es una solución homogénea de (5). La forma natural de  $u_1$  para las condiciones (7) y (8) fue dada en<sup>2</sup> para el caso  $u_0 = 0$ , y es

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0 \left( b_n \frac{r}{a} \right) \exp (-b_n^2 t') \quad (10)$$

$$t' = \frac{\nu}{a^2} t \quad (11)$$

en donde  $J_j$  es la función de Bessel de primera clase y orden  $j$ ,  $J_0(b_n) = 0$  y los  $C_n$  son coeficientes arbitrarios, que permitirán imponer la condición inicial (8), apoyándose en la ortogonalidad de los  $J_0(b_n r/a)$ .

De este modo, (6) toma la forma

$$u = u_0 \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{b_n J_1(b_n)} J_0 \left( b_n \frac{r}{a} \right) \exp (-b_n^2 t') \right] - \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} [a^2 - r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 a^2}{b_n^3 J_1(b_n)} J_0(b_n \frac{r}{a}) \exp (-b_n^2 t')] \quad (12)$$

El esfuerzo de corte para  $r = a$  es

$$\tau_0 = -\mu \frac{\partial u}{\partial r} (a, t) \quad (13)$$

Al aplicar (13) en (12) resulta

$$\tau_0 = -\frac{a}{4} \frac{\partial P}{\partial x} \left[ 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{b_n^2} \exp (-b_n^2 t') \right] - \frac{2\mu u_0}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \exp (-b_n^2 t') \quad (14)$$

Simple inspección de (14) revela que para  $u_0 \neq 0$  el esfuerzo de corte  $\tau_0$  es infinito en valor absoluto para  $t = 0$  y, para  $t' < 0,025$ ,  $\tau_0$  es mayor en valor absoluto que  $\tau_0(\infty)$ .

Gráficos adimensionales de (12) y (14) se presentan en las figuras 1 y 2 para

$$u_0 = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (15)$$

La figura 1 ilustra la evolución de la distribución instantánea de velocidades. En ella se aprecia que se predice inicialmente una gran aceleración en la cercanía de la pared del tubo, alcanzándose la velocidad  $u_0$  en forma prácticamente instantánea en la pared misma, lo cual generaría un esfuerzo de corte muy grande en esa región.

La conducta de  $\tau_0$ , mostrada en la figura 2, confirma lo anterior, encontrándose que, para cualquier valor de  $u_0 \neq 0$ , se tiene una discontinuidad en el esfuerzo de corte para  $r = a$  y  $t = 0$ , lo cual no es aceptable en un medio continuo.

Frente a esta situación habría que aceptar que si  $u_0 \neq 0$ , entonces cualquier fluido

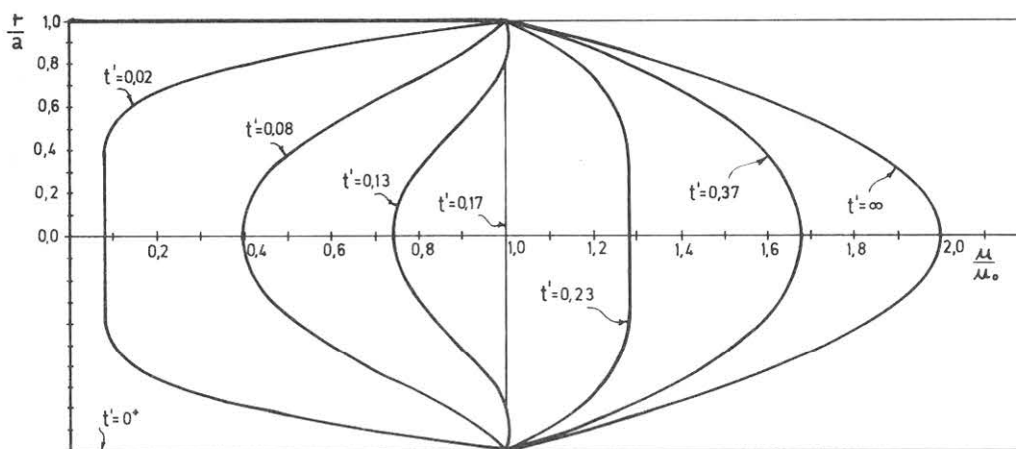


Figura 1. Evolución temporal de la velocidad.

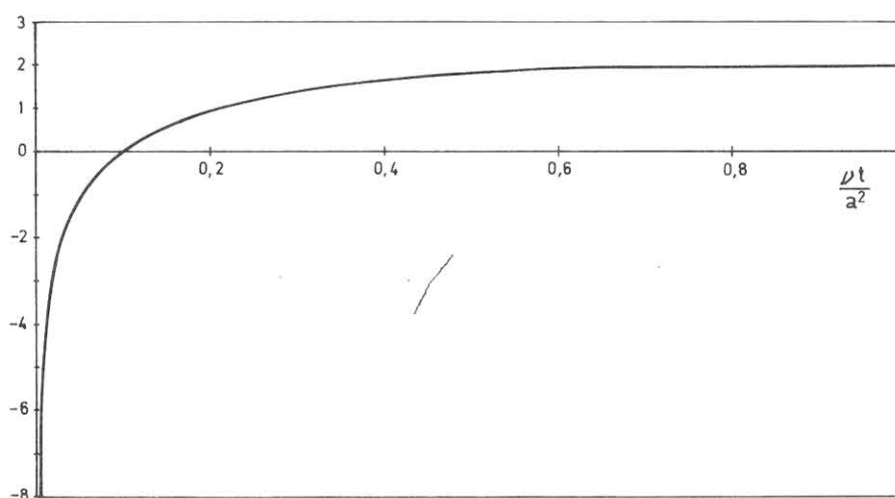


Figura 2. Esfuerzo cortante en la pared del tubo.

Newtoniano no se comportaría como tal inicialmente en este tipo de flujos, de lo cual no hay evidencia experimental alguna<sup>3</sup>. Por lo tanto, parece más razonable entender que en el ejemplo discutido la hipótesis de no-deslizamiento es una condición física y matemáticamente necesaria.

#### 4. CONCLUSIONES

Un análisis, por métodos tradicionales, del fenómeno de establecimiento en el tiempo de flujo de Poiseuille con deslizamiento en la pared, pone en evidencia que el fluido se comportaría en forma antinatural para  $t = 0$  en las cercanías de la pared (el esfuerzo cortante se haría infinito).

Esto exige aceptar que a) el fluido perdería su calidad de medio continuo, o b) el fluido dejaría de comportarse en forma Newtoniana, o c) la hipótesis de no-deslizamiento en este caso es necesaria. Dada la evidencia experimental disponible (en ningún caso completa), la tercera alternativa parece la más lógica, estimándose así que este estudio constituiría un rudimento de demostración analítica de que, en ciertos escurrimientos de fluidos Newtonianos, la condición de no-deslizamiento necesariamente debe cumplirse.

## REFERENCIAS

1. PEARSON, J.R.A., "Wider horizons for fluid mechanics", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 106 (1981).
2. SZYMANSKI, F.J., "Quelques solutions exactes des équations de l'hydrodynamique de fluide visqueux dans le cas d'un tube cylindrique", Journal des mathématiques pures et appliquées, Vol. II, Series 9 (1932).
3. LETELIER S., M.F. and H.J. LEUTHEUSSER, "Skin friction in unsteady laminar pipe flow", Journal of the Hydraulics Division, Vol. 102 (1976).